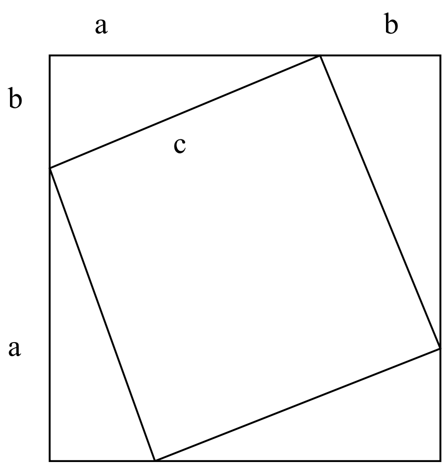
Fórmula para generar el triángulo de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es muy conocido por todo el mundo, uno de sus triángulos más conocido es el de lados 3, 4 y 5. Catetos 3 y 4, hipotenusa 5.
Existe una demostración gráfica de dos cuadrados uno dentro de otro haciendo que las esquinas del cuadrado interior toquen los lados del cuadrado exterior, como sigue:



Demostración del teorema de Pitágoras:

El área del cuadrado exterior: $(a + b)^2$
El área del cuadrado interior: c^2
El área del triángulo recto: $a * b / 2$
El área del cuadrado exterior: área del cuadrado interior + área de los 4 triángulos rectos.

Igualando:
$(a + b)^2 = c^2 + 4 * (a * b / 2)$
Desarrollando:
$a^2 + 2 * a * b + b^2 = c^2 + 2 * a * b$
Simplificando términos iguales (2 * a * b):
$a^2 + b^2 = c^2$

Desde una colección de triángulos rectángulos conocidos tenemos:

Cateto menor	Cateto mayor	Hipotenusa
3	4	5
5	12	13
6	8	10
7	24	25
9	12	15
9	40	41
10	24	26
11	60	61
12	16	20
13	84	85
14	48	50
15	20	25
15	36	39
15	112	113
17	144	145
18	80	82
19	180	181
20	48	52
21	72	75
21	220	221

De los cuales podemos encontrar que varias secuencias de triángulos son múltiplos de otros valores de triángulos bases, por lo tanto nos quedamos con los siguientes:

Cateto menor	Cateto mayor	Hipotenusa
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85
15	112	113
17	144	145
19	180	181
21	220	221

En base a estos triángulos primigenios que son submúltiplos de los que hemos eliminado, pasamos a analizarlos para encontrarnos con la fórmula que genera los triángulos rectos:

Nuestro primer triángulo es el 3, 4, 5; nuestro siguiente triángulo es el 5, 12, 13, por lo tanto nuestro lado más pequeño es un impar, por lo tanto su secuencia de crecimiento es de 2 en 2; el siguiente lado pasa de 4 a 12, por lo tanto hubo una multiplicación de 4 x 3, el tercer número es una unidad mayor que el cateto mayor es decir 12 + 1 es 13. En este punto tenemos cómo hallar el menor cateto y la hipotenusa, nos debemos centrar en hallar el cateto mayor. Prosigamos, el siguiente impar es 7, el cateto mayor es 4 x 6 entonces 24, su hipotenusa es 25, el siguiente triángulo empieza con impar, es 9, el cateto mayor es 4 x 10 entonces 40 y la hipotenusa es 41, el siguiente triángulo empieza con impar es 11, el cateto mayor es 4 x 15 entonces 60 y la hipotenusa es 61, y así sucesivamente.

Por lo tanto los valores encontrados nos sugerirían las siguientes secuencias que son:
Para el cateto menor 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 …
Para el cateto mayor 4 x (1+ (2 + (3+ (4+ (5 + (6+ (7+ …)))))))
Nos da soluciones: 4, 12, 24, 40, 60, 84, 112 …
Para la hipotenusa: **cateto mayor + 1**: 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113 …

En base a la secuencia numérica para encontrar los lados mayores del triángulo a partir del cateto menor, nos encontramos con una acumulación de números secuenciales para poder hallar el cateto mayor.
Aprovechamos la fórmula para la suma de números secuenciales de razón aritmética: $S = (a + u)* n /2$
Donde S = suma de términos;
a = primer elemento de la serie;
u = último elemento de la serie;
n= cantidad de términos de la serie.

En nuestra secuencia el último término coincide con la cantidad de términos de la serie.

Generando la fórmula general para la creación de triángulos rectos con números (enteros) que cumplan el teorema de Pitágoras:
Cateto menor = X   impar, por lo tanto su número de orden es:
n = u = (X-1)/2 y al reemplazar en la fórmula de la suma de una serie de términos con razón aritmética obtenemos:
Cateto mayor es 4 * S --> 4 * (1 + (X-1)/2) * ((X-1)/2)/2 operando logramos obtener sucesivamente:
4 * ((2 + X – 1)/2) * (X – 1)/4 y luego
(1 + X) * (X – 1) / 2   lo que nos resulta en una fórmula:
$(X^2 - 1)/2$

Resumiendo:
Cateto menor = X
Cateto mayor = $(X^2 - 1)/2$
Hipotenusa = cateto mayor + 1

Generalizando: Dado cualquier valor para un cateto del triángulo recto, podemos hallar el triángulo de Pitágoras que se ajuste a dichos valores.

Cateto menor (Impares)	Cateto mayor	Hipotenusa
a^2	b^2	c^2
X	$(X^2 - 1)/2$	b + 1

Un ejemplo:
Para un valor de a=2, obtenemos b=1.5 resultando c=2.5, que viene a ser un submúltiplo de nuestro triángulo 3,4,5
Para cateto menor un número impar nos resultan triángulos diferentes y primigenios, pero para números pares, nos resultan múltiplos o submúltiplos de otros triángulos.

Con esto provocamos nuevas series, por ejemplo con el ”cateto menor” = 4, nos da 7.5 y 8.5, al convertirlo a enteros nos da 8,15,17, generando una nueva secuencia de triángulos rectos para cateto menor (X) a partir de 4 y múltiplos, por ejemplo X=4, X=8, X=12 y sucesivos:

Cateto menor	Cateto mayor	Hipotenusa
4	3	5
8	15	17
12	35	37

Nos da las siguientes fórmulas:

Cateto menor (múltiplo de 4)	Cateto mayor	Hipotenusa
a^2	b^2	c^2
X	$(X/2)^2 - 1$	b + 2

No escribimos para el cateto X=6 porque nos resulta el múltiplo del triángulo 3,4,5.

En base a las secuencias encontradas para triángulos rectos de lados enteros, tomamos para X los impares y al encontrar valores decimales, y al multiplicarlos por 8, podemos llegar a otra fórmula para cateto menor (X) a partir de 4 + múltiplos de 8, por ejemplo:

Cateto menor (X)	Cateto mayor	Hipotenusa
12	5	13
20	21	29
28	45	53

Cateto menor (4+múltiplo de 8)	Cateto mayor	Hipotenusa
a^2	b^2	c^2
X	$(X/4)^2 - 4$	b + 8

Esta última fórmula aplicada para X = 16, estamos obteniendo nuestro consabido triángulo 3, 4, 5 multiplicado por 4.

Continuando con nuestra interpolación para números intermedios, por ejemplo X=17 en la última fórmula encontrada, tendremos valores para:

b=14.0625 y c=22.0625, lo que nos obliga a multiplicarlo por 16, resultando:
a=272, b=225, c=353,
y para X=19, tendremos b=18.5625, c=26.5625 al multiplicarlo por 16, resulta a=304, b=297, c=425 generando la fórmula:

Cateto menor (272+múltiplo de 32)	Cateto mayor	Hipotenusa
a^2	b^2	c^2
X	(X/16)2 – 64	b + 128

Realmente el desfase 272 es para empezar desde un número donde los triángulos sub-siguientes correspondan realmente a cateto menor, cateto mayor e hipotenusa. Y el múltiplo usado, en este caso 32, es para que los resultados de cateto mayor e hipotenusa sean enteros.

Y así podemos seguir generando fórmulas para otras secuencias hasta lograr una fórmula general generadora de triángulos rectos.

Javier Dillon
Ingeniero Industrial
javidil@hotmail.com